



Marco Wölfle

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik



Steinbeis-Transfer-Institut
Angewandte Statistik und
Volkswirtschaftslehre
der Steinbeis-Hochschule Berlin SHB

Prof. Dr. Marco Wölfle ist wissenschaftlicher Leiter der Steinbeis-Transfer-Institute „Angewandte Statistik und Volkswirtschaftslehre“, „Center for Real Estate Studies“ sowie „VWA Business School“. Dort ist er Inhaber der Juniorprofessur für Finanz- und Immobilienwirtschaft. Er war zuvor Rektor der International University of Cooperative Education Freiburg.

Wölfle studierte und promovierte an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, die ihm für die Leistungen im Rahmen seiner Dissertation „The Role of Information in Financial Markets“ den Constantin-von-Dietze-Preis verlieh. Seine derzeitigen Forschungsschwerpunkte befassen sich mit der Effizienz von energetischen Sanierungsmaßnahmen und der Effizienz unterschiedlicher Marktdesigns in der Immobilienwirtschaft.

In der Lehre vertritt Wölfle die quantitativen und qualitativen Forschungsmethoden, die Volkswirtschaftslehre, die Finanzmärkte und das betriebswirtschaftliche Rechnungswesen.

Marco Wölfle

Wirtschaftsmathematik



**Steinbeis-Transfer-Institut
Angewandte Statistik und
Volkswirtschaftslehre**

der Steinbeis-Hochschule Berlin SHB

Ansprechpartner:

Steinbeis-Transfer-Institut
Angewandte Statistik und Volkswirtschaftslehre
Prof. Dr. Marco Wölfle
Untere Waldstraße 22
79194 Gundelfingen

Impressum

© 2015 Steinbeis-Edition

Alle Rechte der Verbreitung, auch durch Film, Funk und Fernsehen, fotomechanische Wiedergabe, Tonträger jeder Art, auszugsweisen Nachdruck oder Einspeicherung und Rückgewinnung in Datenverarbeitungsanlagen aller Art, sind vorbehalten.

Marco Wölfle
Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

1. Auflage, 2015 | Steinbeis-Edition, Stuttgart
ISBN 978-3-95663-056-9

Satz: Marco Wölfle
Titelbild: ©Maxx-Studio/shutterstock.com
Druck: WIRmachenDRUCK GmbH, Backnang

Steinbeis ist weltweit im unternehmerischen Wissens- und Technologietransfer aktiv. Zum Steinbeis-Verbund gehören derzeit rund 1.000 Unternehmen. Das Dienstleistungsportfolio der fachlich spezialisierten Steinbeis-Unternehmen im Verbund umfasst Forschung und Entwicklung, Beratung und Expertisen sowie Aus- und Weiterbildung für alle Technologie- und Managementfelder. Ihren Sitz haben die Steinbeis-Unternehmen überwiegend an Forschungseinrichtungen, insbesondere Hochschulen, die originäre Wissensquellen für Steinbeis darstellen. Rund 6.000 Experten tragen zum praxisnahen Transfer zwischen Wissenschaft und Wirtschaft bei. Dach des Steinbeis-Verbundes ist die 1971 ins Leben gerufene Steinbeis-Stiftung, die ihren Sitz in Stuttgart hat. Die Steinbeis-Edition verlegt ausgewählte Themen aus dem Steinbeis-Verbund.

Vorwort

Als Hilfswissenschaft der Betriebs- und Volkswirtschaftslehre lassen sich zur Wirtschaftsmathematik etliche Lehrbücher finden. Wozu bedarf es also einer weiteren Variante?

Das vorliegende Werk soll Lücken schließen, die entstehen, wenn Probleme nur aus einer theoretischen Perspektive betrachtet werden. Dazu wird nach Möglichkeit immer ein praktisches Anwendungsbeispiel mit den vorgestellten Methoden verknüpft.

Daneben gilt es, die vorgestellten Formeln inhaltlich zu erläutern und zu interpretieren. Dazu werden die meisten Ableitungen durch textliche Erklärungen begleitet.

Eine der wichtigsten Kernkompetenzen in der modernen Wissensgesellschaft ist die Fähigkeit, bekannte Verfahren und Modelle auf weitere sowie neuartige Anwendungsgebiete und Fragestellungen zu übertragen. Nach ersten theoretischen Ableitungen und Begründungen werden Berechnungen mit einem weiteren Zahlenbeispiel vorgestellt und durch Übungsaufgaben zur Vertiefung ergänzt.

Das Buch eignet sich als Vorlesungsbegleiter aber auch im fortgeschrittenen Studium zum Nachlesen. Falls Mathematik noch nie zu Ihren Stärken zählte, haben Sie jetzt zwei Möglichkeiten: Die erste Möglichkeit wäre, von vorne herein mit Motivation und Disziplin einen Neustart mit dem Fach zu wagen und regelmäßig die behandelten Inhalte zu üben und nachzuarbeiten. Sie haben sich schließlich für ein wirtschaftswissenschaftliches Studium entschieden, in dem es oft um Anwendungen rund um Geld geht. Geld wird bekanntlich in Zahlen gemessen. Ohne das nötige Grundverständnis hierfür kommen Sie ganz schnell zur zweiten Möglichkeit: Legen Sie dann das Buch so schnell wie möglich zur Seite, sagen Sie sich, dass Mathematik noch nie Ihre Stärke war, ärgern Sie sich über jede Anwendung mit Zahlen im Studium und verfehlen Sie möglicherweise Ihr Studienziel.

Sie haben die Wahl.

Marco Wölfe, August 2015.

Inhaltsverzeichnis

1	Basiswissen und Grundrechenarten	1
1.1	Arten von Zahlen	1
1.2	Grundrechenarten	2
1.2.1	Addition	2
1.2.2	Subtraktion	2
1.2.3	Multiplikation	3
1.2.4	Division	3
1.3	Reihenfolge der Operationen	4
1.3.1	Subtraktion von Klammern	5
1.3.2	Ein- und Ausklammern	5
1.3.3	Binomische Formeln	6
1.4	Besondere Operatoren	7
1.4.1	Summenzeichen	7
1.4.2	Doppelsummen	9
1.4.3	Produktzeichen	10
1.5	Fakultät	10
1.6	Bruchrechnen	11
1.7	Potenzrechnen	13
1.8	Aufgaben und Lösungen	14
2	Finanzmathematik	18
2.1	Zins	18
2.2	Festgeld mit jährlichen Zinsraten	19
2.3	Festgeld mit periodischen Zinsraten	21
2.4	Effektiver Zinssatz	23
2.5	Festgeld und Anlagedauer	24
2.6	Gesamtbarwert	25
2.7	Annuitäten	26
2.8	Veränderungsraten und -faktoren	28
2.9	Aufgaben und Lösungen	29
3	Gleichungen	36
3.1	Typen von Gleichungen	38
3.1.1	Identitätsgleichungen	38
3.1.2	Bestimmungsgleichungen	38
3.1.3	Definitionsgleichungen	39
3.1.4	Lineare Gleichung	39
3.1.5	Quadratische Gleichung	40

3.1.6	Wurzelgleichung	40
3.2	Gleichungen lösen	41
3.3	Gleichungssysteme	42
3.3.1	Einsetzverfahren	43
3.3.2	Additionsverfahren	44
3.3.3	Gleichsetzungsverfahren	45
3.4	Aufgaben und Lösungen	46
4	Funktionen	52
4.1	Beispielhafte Funktionen	53
4.1.1	Funktionen entwickeln	53
4.1.2	Lineare Funktionen	54
4.1.3	Quadratische Funktionen	56
4.1.4	Funktionen höherer Ordnung	57
4.1.5	Gebrochen-rationale Funktion	58
4.1.6	Wurzelfunktionen	59
4.1.7	Exponentialfunktion	59
4.1.8	Logarithmusfunktion	60
4.2	Aufgaben und Lösungen	61
5	Differentialrechnung	62
5.1	Ableitungsregeln	64
5.1.1	Ableitungen mit Konstanten	65
5.1.2	Ableitungen von Summen	65
5.1.3	Ableitungen höherer Ordnung	66
5.2	Komplexere Ableitungen	67
5.2.1	Produktregel	67
5.2.2	Quotientenregel	68
5.2.3	Kettenregel	69
5.3	Extremwerte	70
5.4	Aufgaben und Lösungen	73
6	Betriebswirtschaftliche Anwendungen	79
6.1	Nachfrage	79
6.2	Umsatzfunktion	82
6.3	Kostenfunktionen	84
6.4	Gewinnfunktion	87
6.4.1	Break-even-Punkte	87
6.4.2	Gewinnmaximierung	88
6.5	Homogenität	90
6.6	Elastizität	91
6.7	Aufgaben und Lösungen	93
7	Bivariate Funktionen	102
7.1	Ableitungsregeln	102
7.2	Extremwerte bivariater Funktionen	105
7.3	Optimierung unter Nebenbedingung	108
7.3.1	Lagrange-Multiplikator	112
7.3.2	Weitere Anwendungen des Lagrange-Verfahrens	113
7.4	Aufgaben und Lösungen	117

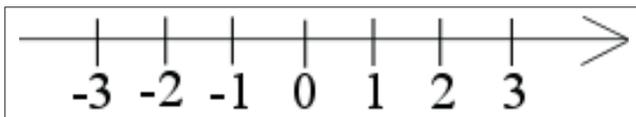
Kapitel 1

Basiswissen und Grundrechenarten

Viele der Konzepte dieses Kapitels werden Ihnen bekannt vorkommen. Sie werden in pragmatischer Weise und zur Hinführung auf die vertiefenden Berechnungen vorgestellt.

1.1 Arten von Zahlen

Die Mathematik lässt sich vollständig auf die Zahl 1 als kleinste natürliche Zahl beziehen. Alle weiteren Zahlen lassen sich aus ihr reproduzieren bzw. auf sie zurückführen. Ebenso lassen sich in Anlehnung an die Zahl 1 alle Berechnungskonzepte entwickeln und können folglich auch mit ihr durchgeführt werden. Zur Veranschaulichung wird meist ein Zahlenstrahl verwendet.



Die Zahlen 2, 3, usw. lassen sich durch Addition der Zahl 1 erzeugen, ebenso wie durch Subtraktion weitere Zahlen entwickelt werden können. Zahlen, die durch Addition auf dem Zahlenstrahl rechts von 1 dargestellt sind, werden als *größer* bezeichnet und in Relation zur 1 mit $>$ beschrieben. Umgekehrt gilt für alle Zahlen, die durch Subtraktion entstanden sind und damit links auf dem Zahlenstrahl stehen, das mathematische Zeichen $<$ für *kleiner*.

Die folgende Liste gibt die wichtigsten Zahlenarten zusammen mit einer Beschreibung, Beispielen und ihren mathematischen Bezeichnern wieder:

- **Natürliche Zahlen:** \mathbb{N}
Alle ganzen positiven Zahlen ohne Null: 1, 2, 3, 4 ···